

# 机器人的滑模与哈密顿平滑切换控制

刘安兴,于海生

(青岛大学 自动化学院,山东 青岛 266071)

**摘要:**针对目前机械臂末端位置控制不能同时满足快速性与准确性的问题,设计了新型切换双幂次趋近率,进一步提高了滑模控制的快速性,且提出了滑模与哈密顿的平滑切换控制策略。滑模控制具有良好的快速性能但稳态性能较差,抖振影响系统安全。哈密顿控制方法从能量角度出发,具有良好的稳态性能但其动态性能较差。提出的平滑切换控制方法综合考虑2种方法的优缺点,设计了平滑切换函数,当误差较大时由滑模控制保证系统响应的快速性,随着误差的逐渐减小,哈密顿控制方法的作用逐渐增大。仿真表明平滑切换控制策略同时保证了机械臂末端位置控制的快速性与准确性。

**关键词:**机器人;滑模控制;趋近率;平滑切换

**中图分类号:**TP242 **文献标识码:**A **DOI:**10.19457/j.1001-2095.dqcd20986

## Smooth Switching Control of SMC and Hamilton for Robot

LIU Anxing, YU Haisheng

(College of Automation, Qingdao University, Qingdao 266071, Shandong, China)

**Abstract:** In order to solve the problem that the position control of the manipulator end can not satisfy both rapidity and accuracy, a new switching double power reaching law was designed to further improve the rapidity of the sliding mode control, and a smooth switching control strategy of sliding mode and Hamilton was proposed. Sliding mode control has good fast performance but poor steady performance. Chattering affects system safety. The Hamiltonian control method has good steady-state performance but poor dynamic performance from the energy point of view. In the proposed smooth switching control method, the advantages and disadvantages of the two methods were considered and the smooth switching function was designed. When the error was large, the rapidity of the system response was ensured by the sliding mode control. As the error decreased gradually, the function of the Hamiltonian control method was increased gradually. Simulation results show that the smooth switching control strategy ensures the speed and accuracy of the position control at the manipulator end.

**Key words:** robot; sliding model control(SMC); reaching law; smooth switching

由于在工业中的广泛使用,机械臂控制的准确性与稳定性一直是研究热点。除PID控制之外,常用的还有反步控制、滑模控制、模糊控制以及神经网络控制等<sup>[1-3]</sup>,其中,滑模控制由于其特有的快速性更是受到广大学者的关注。

文献[4]提出了有限时间滑模控制,实现了更快速地有限时间收敛;文献[5]提出了一种新型滑模面以及双幂次趋近率,提高了滑模控制的快速性;文献[6]在趋近率中加入衰减因子,保证了滑模控制的快速性并且有效地减弱了抖振;文献[7]基于fal函数提出了新型双幂次组合函数

趋近率,进一步提高了滑模控制的快速性;文献[8]提出了非线性PD+滑模控制方法,文献[9]提出了自适应PD+滑模控制方法,文献[10]提出了自适应滑模控制方法,3种方法都有效地减弱了滑模的抖振,但并不能完全消除抖振。

从能量角度出发的哈密顿控制方法具有良好的稳态性能,国内外很多学者做了此方面的研究<sup>[11-13]</sup>。

基于以上分析,本文提出了新型切换双幂次趋近率,提高了滑模控制的快速性;综合滑模信号控制与哈密顿能量控制的优点,设计了平滑切换

**基金项目:**国家自然科学基金资助项目(61573203)

**作者简介:**刘安兴(1996—),男,硕士, Email:2606541174@qq.com

控制器,使系统同时具有滑模控制的动态性能以及哈密顿控制的稳态性能。

## 1 机器人系统控制方案

机器人系统控制方案如图1所示。

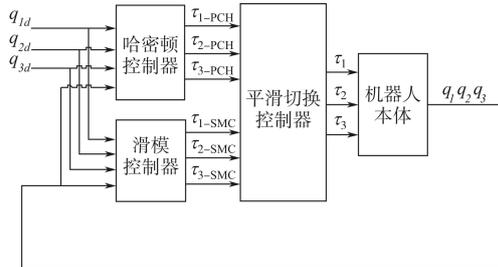


图1 机器人系统控制方案

Fig.1 Control scheme of the robot system

## 2 机器人系统模型

3 关节机器人模型如图2所示。图2中, \$d\_1, d\_2, d\_3\$ 分别为关节机器人的3个连杆长度 (\$d\_1 = d\_2 = d\_3 = 1\$); \$q\_1, q\_2, q\_3\$ 分别为3个关节的角位移; \$m\_1, m\_2, m\_3\$ 分别为3个关节的质量 (\$m\_1 = m\_2 = m\_3 = 1\$)。

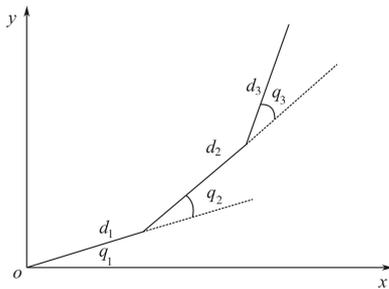


图2 3 关节机器人模型

Fig.2 Three-joint robot model

3 自由度机械臂动态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} = \mathbf{T} - \mathbf{R}_f\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{y} = \mathbf{q} \end{cases} \quad (1)$$

式中: \$\mathbf{q}\$ 为机械臂关节的角度; \$\dot{\mathbf{q}}\$ 为机械臂关节的角速度; \$\ddot{\mathbf{q}}\$ 为机械臂关节的角加速度; \$\mathbf{D}(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}\$ 为正定对称惯性矩阵; \$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}\$ 为哥式力和向心力矩阵; \$\mathbf{R}\_f \in \mathbf{R}^n\$ 为外界扰动; \$\mathbf{T} \in \mathbf{R}^n\$ 为输入控制力矩; \$\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n\$ 为输出向量; \$\mathbf{G}\$ 为重力项。

式(1)中参数矩阵和参数向量可表示为

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

其中 
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = m_1 d_1^2 + m_2 d_1^2 + m_2 d_2^2 + 2m_2 d_1 d_2 c_2 + m_3 d_1^2 + m_3 d_2^2 + m_3 d_3^2 + 2m_3 d_1 d_2 c_2 + 2m_3 d_1 d_3 c_{23} + 2m_3 d_2 d_3 c_3$$

$$D_{12} = D_{21} = m_2 d_2^2 + m_3 d_2^2 + m_3 d_3^2 + m_3 d_1 d_2 c_2 + m_3 d_1 d_3 c_{23} + 2m_3 d_2 d_3 c_3 + m_2 d_1 d_2 c_2$$

$$D_{13} = D_{31} = m_3 d_3^2 + m_3 d_2 d_2 c_3 + m_3 d_1 d_3 c_{23}$$

$$D_{22} = m_2 d_2^2 + m_3 d_2^2 + m_3 d_3^2 + 2m_3 d_2 d_3 c_3$$

$$D_{23} = D_{32} = m_3 d_3^2 + m_3 d_2 d_3 c_3$$

$$D_{33} = m_3 d_3^2$$

$$C_{11} = -m_2 d_1 d_2 s_2 \dot{\theta}_2 - m_3 d_1 d_2 s_2 \dot{\theta}_2 - m_3 d_1 d_3 s_{23} \dot{\theta}_2 - m_3 d_1 d_3 s_{23} \dot{\theta}_3 - m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_3$$

$$C_{12} = -m_3 d_1 d_2 s_2 \dot{\theta}_2 - m_3 d_1 d_2 s_2 \dot{\theta}_1 - m_3 d_1 d_3 s_{23} \dot{\theta}_2 - m_3 d_1 d_2 s_{23} \dot{\theta}_1 - m_3 d_1 d_3 s_{23} \dot{\theta}_3 - m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_3 - m_2 d_1 d_2 s_2 \dot{\theta}_2 - m_2 d_1 d_2 s_2 \dot{\theta}_1$$

$$C_{13} = -m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_3 - m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_2 - m_3 d_1 d_3 s_{23} \dot{\theta}_2 - m_3 d_2 d_3 s_{23} \dot{\theta}_3 - m_3 d_1 d_3 s_{23} \dot{\theta}_1 - m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_1$$

$$C_{21} = -m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_3 + m_2 d_1 d_2 s_2 \dot{\theta}_1 + m_3 d_1 d_2 s_2 \dot{\theta}_1 + m_3 d_1 d_3 s_{23} \dot{\theta}_1$$

$$C_{22} = -m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_3$$

$$C_{23} = -m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_3 - m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_2 - m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_1$$

$$C_{31} = m_3 d_1 d_3 s_{23} \dot{\theta}_1 + m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_2 + m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_1$$

$$C_{32} = m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_2 + m_3 d_2 d_3 s_3 \dot{\theta}_1$$

$$C_{33} = 0$$

$$\theta_i = q_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$g_1 = m_1 g d_1 c_1 + m_2 g d_1 c_1 + m_2 g d_2 c_{12} + m_3 g d_1 c_1 + m_3 g d_2 c_{12} + m_3 g d_3 c_{123}$$

$$g_2 = m_2 g d_2 c_{12} + m_3 g d_2 c_{12} + m_3 g d_3 c_{123}$$

$$g_3 = m_3 g d_3 c_{123}$$

$$c_i = \cos \theta_i \quad s_i = \sin \theta_i \quad c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$$

$$s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j) \quad c_{ijk} = \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$$

式中: \$\theta\_i\$ 为各关节角度; \$g\_i\$ 为各关节重力加速度。

## 3 控制器设计

### 3.1 信号控制器设计

信号控制器采用基于趋近率的滑模控制方法,常用的传统趋近率有指数趋近率、幂次趋近率以及双幂次趋近率。双幂次趋近率描述为

$$\dot{\mathbf{s}} = -k_1 |\mathbf{s}|^\alpha \text{sgns} - k_2 |\mathbf{s}|^\beta \text{sgns} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1 \quad \beta > 1 \\ k_1 > 0 \quad k_2 > 0 \end{aligned}$$

以  $|s|=1$  为界限,当系统距离滑模面较近时,式(2)等号右侧第1项的速度大于第2项的速度;当系统远离滑模面时,等号右侧第2项的速度大于第1项的速度。

基于以上分析,本文提出了一种新型双幂次趋近率:

$$\dot{s} = -Q(s) \cdot k_1 |s|^\alpha \text{sgns} - [1-Q(s)] \cdot k_2 |s|^\beta \text{sgns} \quad (3)$$

其中

$$Q(s) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{|s|-1}{\sigma}\right)^2\right] & |s| > 1 \\ 1 & |s| \leq 1 \end{cases}$$

式中: $\sigma$ 为尺度参数。

当 $\sigma$ 取不同值时, $Q(s)$ 函数曲线如图3所示。图3中, $Q(s)$ 函数保证了当系统趋近滑模面时,式(2)等号右侧第1项起主要作用;当系统远离滑模面时,式(2)等号右侧第2项起主要作用。图4中3条曲线分别为 $\dot{s} = -k_1 |s|^\alpha \text{sgns}$ ,  $\dot{s} = Q(s) \cdot k_1 |s|^\alpha \text{sgns} - [1-Q(s)] \cdot k_2 |s|^\beta \text{sgns}$ ,  $\dot{s} = -k_2 |s|^\beta \text{sgns}$ ,可见,在系统趋近滑模面的过程中,本文设计的趋近率有更快的速度。

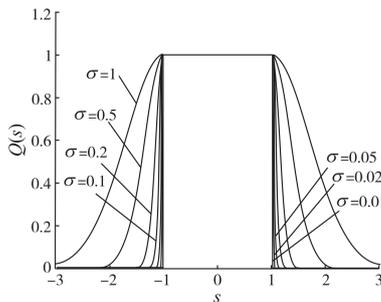


图3  $Q(s)$ 函数曲线  
Fig. 3 Curves of  $Q(s)$

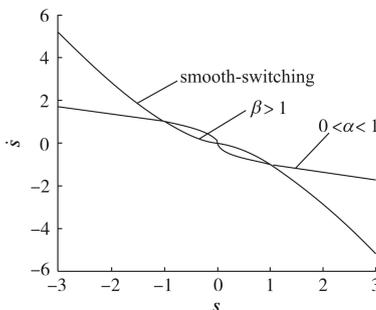


图4 3个趋近率对比图  
Fig. 4 Comparison of three approaches

使用常用的线性滑模面:

$$s = \dot{e} + \beta e \quad (4)$$

其中

$$e = q_d - q$$

将式(4)和式(3)代入式(1)得控制力矩  $T_s$  为

$$\begin{aligned} T_s = D(q) \{ Q(s) \cdot k_1 |s|^\alpha \text{sgns} + [1-Q(s)] \cdot \\ k_2 |s|^\beta \text{sgns} + \dot{\beta} e \} + R_f \dot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $k_1, k_2$ 为正常矩阵;下标“d”为期望变量。

取 Lyapunov 函数  $V = \frac{1}{2} s^T s$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{V} = s^T \dot{s} \\ = s^T \{ -Q(s) \cdot k_1 |s|^\alpha \text{sgns} - [1-Q(s)] \cdot \\ k_2 |s|^\beta \text{sgns} \} \leq 0 \end{aligned}$$

当且仅当误差  $e=0$  即  $q_d=q$  时上式取等号,故系统渐近稳定。

### 3.2 能量控制器设计

定义系统的状态向量为

$$x = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} q &= [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \\ p &= D \cdot \dot{q} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T \end{aligned}$$

式中: $q$ 为系统的角位移向量; $p$ 为系统的角动量向量。

取哈密顿函数为机器人系统的动能与势能之和,即

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T D^{-1}(q) p + U(q) \quad (7)$$

式中: $U(q)$ 为系统的势能。

由式(1)、式(6)、式(7)可推导出关节机器人哈密顿模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [J(x) - R(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g T_e \\ &= \left( \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_f \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -C^T \dot{q} + G \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix} T_e \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $J(x)$ 为反对称矩阵, $R(x)$ 为耗散矩阵, $I_3$ 为单位矩阵, $T_e$ 为控制力矩。

选择机器人系统的期望哈密顿函数为

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2} \tilde{p}^T D_d^{-1}(q) \tilde{p} + \frac{1}{2} \tilde{p} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_{ep} \tilde{q} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} K_{ep} &= \text{diag}\{K_{ep1} \quad K_{ep2} \quad K_{ep3}\} \\ \tilde{p} &= p - p_d \quad \tilde{q} = q - q_d \end{aligned}$$

式中: $K_{eq}$ 为正常矩阵; $D_d(q)$ 为期望质量矩阵。

当  $q=q_d$  时  $p_d=0$ ,  $H_d(q, p)$  取最小值, 此时存在力矩  $T_e$  使得系统满足期望的哈密顿系统模型:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = [J_d(q, p) - R_d(q, p)] \begin{bmatrix} \frac{\partial H_d(q, p)}{\partial q} \\ \frac{\partial H_d(q, p)}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (10)$$

由式(8)~式(10)得:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix} T_c = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_R \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -K_{cp}(q - q_d) \\ \dot{q} - \dot{q}_d \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_f \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -C^T \dot{q} + G \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中:  $K_R$  为正定常矩阵。

可求得机器人系统哈密顿控制律为

$$T_c = -K_{cq}(q - q_d) + K_R(\dot{q} - \dot{q}_d) - C^T \dot{q} + G + R_f \dot{q} \quad (12)$$

选取 Lyapunov 函数为  $V_2(x) = H_d(x)$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x) &= \dot{H}_d(x) = \left[ \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \right]^T x \\ &= \left[ \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \right]^T [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \\ &= - \left[ \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \right]^T R_d(x) \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \leq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

当且仅当  $[q \ p]^T = [q_d \ p_d]^T$  时,  $\dot{V}_2(x) = 0$ , 由 LaSalle 不变集理论可知, 系统渐近稳定。

### 3.3 平滑切换控制策略

关节机器人各关节 ( $i=1, 2, 3$ ) 的平滑切换控制策略可以表示为

$$T_i = \alpha(e_i) T_{si} + [1 - \alpha(e_i)] T_{ci} \quad (14)$$

其中

$$e_i = q_i - q_{id}$$

式中:  $\alpha(e_i)$  为平滑切换函数,  $\alpha(e_i)$  在此采用反正切函数(如图 5 所示), 即

$$\alpha(e) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{e}{\eta}\right)^2 \quad (15)$$

式中:  $\eta$  为正的尺度参数。

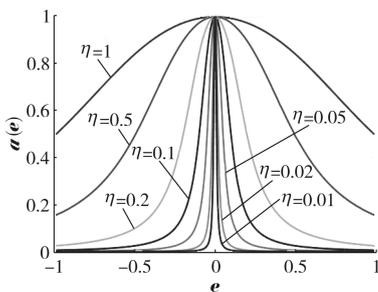


图 5 反正切函数曲线

Fig. 5 Curves of arc tangent

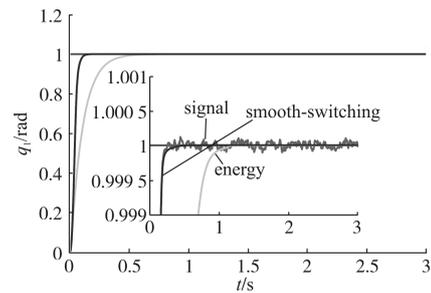
由式(5)、式(12)、式(14)可得机器人系统总控制律为

$$T = \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{e}{\eta}\right)^2 \right] [D(q) [Q(s) \cdot k_1 |s|^\alpha \text{sgns} + [1 - Q(s)] \cdot k_2 |s|^\beta \text{sgns} + \beta \dot{e} + R_f \dot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G] + \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{e}{\eta}\right)^2 [-K_{cp}(q - q_d) - K_R(\dot{q} - \dot{q}_d) - C^T \dot{q} + G + R_f \dot{q}]$$

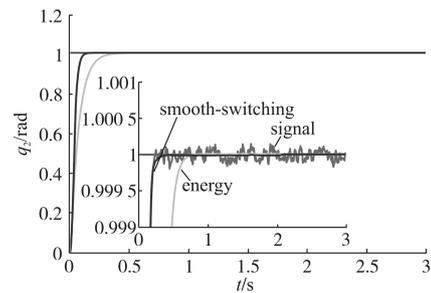
## 4 仿真验证

关节机器人仿真参数及控制器参数设计为:

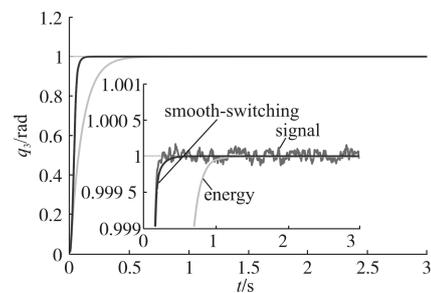
$m_1 = m_2 = m_3 = 0.5$ ,  $K_R = \text{diag}\{75 \ 50 \ 50\}$ ,  $R_f = \text{diag}\{0.03 \ 0.03 \ 0.03\}$ ,  $\sigma = \eta = 0.05$ ,  $K_{cp} = \text{diag}\{73 \ 81 \ 85\}$ ,  $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ ,  $K_1 = \text{diag}\{100 \ 100 \ 100\}$ ,  $\beta = 50$ ,  $K_2 = \text{diag}\{100 \ 100 \ 100\}$ , 实验结果如图 6 所示。



(a) 关节 1



(b) 关节 2



(c) 关节 3

图 6 平滑切换控制策略轨迹跟踪对比图

Fig. 6 Trajectory tracking comparison diagram of smooth switch control strategy

图6为机械臂3个关节滑模控制、哈密顿控制以及平滑切换控制的轨迹跟踪对比图。由图6可知,滑模控制动态响应快但稳态过程不足,而哈密顿控制动态响应慢但稳态性能好,本文设计的平滑切换控制策略兼具滑模控制的动态性能和哈密顿控制的稳态性能。

## 5 结论

本文设计了新型切换双幂次趋近率,解决了传统趋近率收敛慢的问题,理论表明提出的趋近率在系统趋近滑模面和远离滑模面时都有较快的收敛速度;提出了平滑切换控制策略,使系统具有信号控制的快速性和能量控制的稳定性,解决了快速性与准确性不能同时满足的问题。

### 参考文献

- [1] Ouyang P R, Pano V, Tang J, *et al.* Position Domain Nonlinear PD Control for Contour Tracking of Robotic Manipulator[J]. *Robotics and Computer-integrated Manufacturing* 2018, 51:14-24.
- [2] Yang Yueneng, Yan Ye. Neural Network Approximation-based Nonsingular Terminal Sliding Mode Control for Trajectory Tracking of Robotic Airships[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2016, 54:192-197.
- [3] Sayed Bagher Fazeli Asl, Seyyed Sajjad Moosapour. Adaptive Backstepping Fast Terminal Sliding Mode Controller Design for Ducted Fan Engine of Thrust-vectoring Aircraft [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 71:521-529.
- [4] 康宇, 奚宏生, 季海波. 有限时间快速收敛滑模变结构控制[J]. *控制理论与应用*, 2004, 21(4):623-626.
- [5] 梅红, 王勇. 快速收敛的机器人滑模变结构控制[J]. *信息与控制*, 2009, 38(5):552-557.
- [6] 黄华, 李, 刘领化, 等. 基于趋近律的机械臂滑模控制方法研究[J]. *湖南工业大学学报*, 2013, 27(1):62-66.
- [7] 廖瑛, 杨雅君, 王勇. 滑模控制的新型双幂次组合函数趋近律[J]. *国防科技大学学报*, 2017, 39(3):105-110.
- [8] Chems Eddine Boudjedir, Djamel Boukhetala, Mohamed Bouri. Nonlinear PD Plus Sliding Mode Control with Application to a Parallel Delta Robot[J]. *Journal of Electrical Engineering*, 2018, 69(5):329-336.
- [9] Tolgay Kara, Mary Ali. Adaptive PD-SMC for Nonlinear Robotic Manipulator Tracking Control[J]. *Studies in Informatics and Control*, 2017, 26(1):49-58.
- [10] Baek Jaemin, Jin Maolin, Han Soohye. A New Adaptive Sliding-mode Control Scheme for Application to Robot Manipulators[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 2016, 63(6):3628-3637.
- [11] 于海生, 赵克友, 郭雷, 等. 基于端口受控哈密顿方法的PMSM最大转矩/电流控制[J]. *中国电机工程学报*, 2006, 26(8):82-87.
- [12] 于海生, 王海亮, 赵克友. 永磁同步电机的哈密顿建模与无源性控制[J]. *电机与控制学报*, 2006, 10(3):229-233.
- [13] Yu H, Yu J, Liu X, *et al.* Port-Hamiltonian System Modeling and Position Tracking Control of PMSM Based on Maximum Output Power Principle[J]. *ICIC Express Letters*, 2012, 6(2):437-442.

收稿日期:2019-10-10

修改稿日期:2019-12-02